Lagebeziehungen von Geraden im Raum
Übung

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g zur Geraden h.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

   a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

   b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

   c) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

   d) h verläuft durch die Punkte $A(-4; 10; -1)$ und $B(-1; 1; 5)$.

2. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; 3)$ und $C_t(3t; 4 + t; 1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch A und B sowie die Gleichung der Geraden h, die durch die Punkte C_t festgelegt sind. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und h.

3. Welche der folgenden Aussagen ist wahr (w) bzw. falsch (f)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   a) Liefert das Gleichsetzen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ keine Lösung, so sind diese Geraden windschief.

   b) Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ können unterschiedliche Aufpunkte und Richtungsvektoren besitzen, aber trotzdem identisch sein.

   c) Zwei Geraden mit selbem Aufpunkt schneiden sich.

   d) Sind die Richtungsvektoren zweier Geraden linear unabhängig, dann können die Geraden windschief sein.

Lagebeziehungen von Geraden im Raum
Lösung

1.
   a) g und h sind (echt) parallel.
   b) Beide Geraden schneiden sich im Punkt $S(0; -2; 7)$.
   c) g und h sind windschief.
   d) Beide Punkte liegen auf g, die Geraden müssen demnach identisch sein.

2. Es ist $g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, t \in \mathbb{R}$. Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind nicht kollinear, daher müssen sich g und h schneiden oder windschief sein. Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert einen Widerspruch, g und h sind folglich windschief.

3.
   a) f, sie könnten auch parallel sein.
   b) w, die Richtungsvektoren müssen lediglich Vielfache sein und der Aufpunkt der einen Geraden auf der anderen liegen.
   c) f, sie können auch identisch sein.
   d) w, die Geraden sind dann windschief oder sie schneiden sich.